CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f : R \to R, f(x) = \left(a^2 - a + 1\right)x + 1,$ unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $a^2 - a + 1 > 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$

b) Demonstrați că $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$.

c) Comparați numerele $f(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ şi $f\left(\sqrt{2} + 2\right)$.

Soluție:

a) Obține $a^2 - a + 1 = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$ .... 2 puncte

b) Obține $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = a^2 - a + 1 > 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$ .... 3 puncte

c) Pentru $x = 2 + \sqrt{2}, y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ va rezulta $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$ şi cum $x - y > 0$

vom obține $f(x) > f(y)$ .... 2 puncte

2. Fie pătratul $ABCD$ de latura 4 , în care $AC \cap BD = \{O\}$ şi M este mijlocul segmentului $[BO]$.

Considerăm punctul N astfel încât $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DO}$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$, utilizând eventual formula medianei $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$.

c) Demonstrați că punctele A, M, N sunt puncte coliniare.

Soluție:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$ .... 2 puncte

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2\sqrt{10}$ .... 2 puncte

c) Obține $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CN} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$, deci A, M, N - coliniare .... 3 puncte

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $a_1 \neq 0$.

a) Demonstrați că $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{a_1 \cdot n(n+1)}{2}, \ \forall n \geq 1$.

b) Verificați relația $\dfrac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right), \forall n\geq 1$.

c) Demonstrați că $S=\dfrac{a_1}{a_1+a_2}+\dfrac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+...+\dfrac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}=\dfrac{2n}{n+1}$, $\forall n\geq 1$.

Soluție:

a) Obține $a_1+a_2+...+a_n=\dfrac{(a_1+na_1)\cdot n}{2}=\dfrac{a_1\cdot n(n+1)}{2}$, $\forall n\geq 1$ .... 2 puncte

b) Obține $\dfrac{a_1}{a_1+a_2+...+a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ .... 2 puncte

c) Obține $S=2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+...+2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$ .... 3 puncte

4. a) Demonstrați că $1+3+5+...+(2n-1)=n^2, \forall n\geq 1$

b) La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine 1 spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori , etc. După câte minute stadionul se va umple ?

Soluție:

a) Observă că şirul $1,3,5,...,2n-1$ sunt primii n termeni ai unei progresii aritmetice, deci

$1+3+5+...+(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2, \forall n\geq 1$ .... 3 puncte

sau $1+3+5+...+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=n^2$ .... 3 puncte

b) Numărul spectatorilor veniți în primele **n** minute va fi

$1+3+5+...+(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$, deci $n^2=10000$, adică $n=100$ min .... 4 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Rezolvați în mulțimea R ecuațiile :

a) $3^{\frac{1}{x}}-3=2\cdot 3^{\frac{1}{2x}}$,

b) $\log_3 x\cdot\log_{x+6}9=1$.

Soluție:

a) Notăm $3^{\frac{1}{2x}}=a$ şi obținem $a^2-2a-3=0$ .... 1 punct

Rezolvând se obține $a=-1$ sau $a=3$.Convine numai $a=3$, deci $x=\frac{1}{2}$ .... 2 puncte

b) Din condițiile de existență deducem că $x>0$.

Folosind proprietățile logaritmilor se obține $\log_3 x^2=\log_3(x+6)$ .... 2 puncte

Rezolvând se obține că $x=3$ sau $x=-2$ şi convine numai $x=3$ .... 2 puncte

2. Fie $z\in\mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2+2z+4=0$.

a) Demonstrați că z^3 este număr real.

b) Calculați $z^{2016}+2\cdot z^{2015}+2^2\cdot z^{2014}+2^3\cdot z^{2013}+...+2^{2015}\cdot z+2^{2016}$.

Soluție:

a) Observăm că $z\neq 2$, deci $z^2+2z+4=0\Leftrightarrow(z-2)(z^2+2z+4)=0\Leftrightarrow z^3=8$ .... 4 puncte

sau

Rezolvând ecuația $z^2+2z+4=0$, obținem z_1,z_2 .... 2 puncte

Prin ridicare la cub deducem , în fiecare caz, că $z^3=8$ .... 2 puncte

b) Grupând termenii câte trei şi folosind $z^2+2z+4=0$, se deduce că

$(z^{2016}+2\cdot z^{2015}+2^2\cdot z^{2014})+(2^3\cdot z^{2013}+2^4\cdot z^{2012}+2^5\cdot z^{2011})+$

$+\ldots+(2^{2013}\cdot z^3+2^{2014}\cdot z^2+2^{2015}\cdot z)+2^{2016}=2^{2016}$ .... 3 puncte

3. Trei elevi au intrat într-un magazin pentru a cumpăra câte ceva. Primul elev a cumpărat 4 sandviciuri, o cană de ceai şi 10 gogoşi, plătind în total 16,90 lei. Al doilea elev a cumpărat 3 sandviciuri, o cană de ceai şi 7 gogoşi, plătind 12,60 lei. Cât va plăti al treilea elev pentru un sandvici, o cană de ceai şi o gogoaşă ?

Soluție:

Fie s - prețul unui sandvici, c –prețul unei ceşti de ceai şi g -prețul unei gogoşi .... 1 punct

Din enunț avem : $\begin{cases} 4s+c+10g=16,9 \\ 3s+c+7g=12,6 \end{cases}$ .... 2 puncte

Înmulțind prima ecuație cu 2 şi pe a doua cu 3 obținem $\begin{cases} 8s+2c+20g=33,8 \\ 9s+3c+21g=37,8 \end{cases}$ .... 2 puncte

Scăzând ecuațiile obținem $s+c+g=4$ .... 1 punct

Aşadar suma plătită de cel de-al treilea elev este de 4 lei .... 1 punct

4. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni 3×4 sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie şi fiecare coloană formează câte o progresie aritmetică. Ştiind că suma celor patru numere din colțurile tablei este 672, să se determine suma numerelor de pe tablă.

Soluție:

Fie $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, numerele scrise pe tablă .... 1 punct

Avem $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=2(a_1+a_4) \\ b_1+b_2+b_3+b_4=2(b_1+b_4) \\ c_1+c_2+c_3+c_4=2(c_1+c_4) \end{cases}$ .... 2 puncte

Suma tuturor numerelor de pe tablă este $S=2(a_1+b_1+c_1+a_4+b_4+c_4)$ .... 2 puncte

Pe de altă parte $S=2\left[\dfrac{(a_1+c_1)\cdot 3}{2}+\dfrac{(a_4+c_4)\cdot 3}{2}\right]=3(a_1+c_1+a_4+c_4)=2016$ .... 2 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\det\left(A\cdot A^T - x\cdot I_2\right)$, unde A^T - reprezintă transpusa matricei A.

a) Demonstrați că $f(0)\geq 0$.

b) Găsiți $a,b,c\in\mathbb{R}$ dacă $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(-n)+f(-n+1)+...+f(n-1)+f(n)-2n-1}{n^3}\right)$

Soluție:

a) $f(0)=\det(A\cdot A^T)=\det(A)\cdot\det(A^T)=\left[\det(A)\right]^2\geq 0$, sau calcul direct .... 2 puncte

b) Obține $f(x)=x^2-3x+1$, deci $a=c=1, b=-3$ .... 3 puncte

c) Obține $f(-n)+...+f(n)-2n-1=2\left(1^2+2^2+...+n^2\right)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ .... 1 punct

Finalizare : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(-n)+f(-n+1)+...+f(n-1)+f(n)-2n-1}{n^3}\right)=\dfrac{2}{3}$ .... 1 punct

2. O matrice de ordinul al doilea, având elementele din mulțimea $\{0,1,2\}$, se numeşte ***echilibrată*** dacă oricare două elemente aflate pe aceeaşi linie şi aceeaşi coloană sunt numere consecutive. De exemplu $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ este matrice ***echilibrată.***

a) Justificați că matricea I_2 este matrice ***echilibrată.***

b) Câte matrice ***echilibrate*** se pot construi ?

c) Justificați că transpusa oricărei matrice echilibrate este tot o matrice ***echilibrată***.

Soluție:

a) $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi constatăm că este formată cu elemente din mulțimea specificată şi pe orice linie şi orice coloană sunt numere consecutive, deci este matrice ***echilibrată*** .... 2 puncte

b) Dacă $a_{11}=0$, atunci $a_{12}=a_{21}=1$ iar a_{22} poate fi ales în două moduri , deci există 2 matrice de acest tip. La fel dacă $a_{11}=2$ vor exista două matrice de acest tip .... 1 punct

Dacă $a_{11}=1$, atunci $a_{22}=1$ iar celelalte elemente pot fi alese în câte două moduri, deci există 4 matrice de acest tip , şi anume: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ .... 1 punct

Finalizare : există opt matrice ***echilibrate*** .... 1 punct

c) Deoarece o matrice ***echilibrată*** are elementele de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană numere consecutive, rezultă că regula se aplică şi matricei transpuse .... 2 puncte

Sau prin verificarea directă a celor opt matrice anterior construite.

3. a) Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{mx^2+nx+p}{x+q},\ m,n,p,q\in\mathbb{R},D\subset\mathbb{R}.$

Să se determine $m,n,p,q\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei *f* să admită asimptotele $x=2$ şi $y=3x-1$, iar $A(1,3)$ să fie punct al graficului.

b) Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $\left|f(x)-\sin^3 2x\right|\le x^4$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Calculaţi $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

Soluţie:

a) $x=2$ este asimptotă verticală dacă şi numai dacă $2+q=0$ şi $4m+2n+p\neq 0$, deci $q=-2$ (1) .... 1 punct

$A(1,3)$ aparţine graficului lui *f*, rezultă (ţinând cont de relaţia (1)) că avem $m+n+p=-3$ (2) .... 1 punct

Celelalte condiţii:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3\Leftrightarrow m=3$ .... 1 punct

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-3x\right)=-1\Leftrightarrow n=-7\overset{(2)}{\Rightarrow} p=1$ .... 1 punct

b) Putem scrie $-x^4+\sin^3 2x\le f(x)\le x^4+\sin^3 2x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ .... 1 punct

Se obţine $-x+\dfrac{\sin^3 2x}{8x^3}\cdot 8\le\dfrac{f(x)}{x^3}\le x+\dfrac{\sin^3 2x}{8x^3}\cdot 8,\ (\forall)x\in\mathbb{R}^*$ .... 1 punct

Trecem la limită , se obţine $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=8$ .... 1 punct

4. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că $A^4=B^3$.

b) Determinaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât să avem $AX+XB=I_2$.

c) Verificaţi egalitatea $AB+C+I_2=O_2$, unde $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ şi apoi demonstraţi că $(AB)^n\neq I_2,\ (\forall)n\ge 1$

Soluţie:

a) Obţine $A^2=-I_2, A^4=I_2$ .... 1 punct

Obţine $B^2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, B^3=I_2$ .... 1 punct

b) Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, atunci $AX=\begin{pmatrix}c & d\\-a & -b\end{pmatrix}$ şi $XB=\begin{pmatrix}-b & a-b\\-d & c-d\end{pmatrix}$

Relația $AX + XB = I_2$ conduce la $\begin{cases} c-b=1 \\ a+d-b=0 \\ a+d=0 \\ -b+c-d=1 \end{cases}$, de unde $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .... 2 puncte

c) Se verifică prin calcul că $AB + C + I_2 = O_2$ .... 1 punct

Prin calcul direct, sau folosind formula binomului lui Newton, se obține că:

$(AB)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2, (\forall) n \geq 1$ .... 2 puncte

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ cu elementul neutru e. Demonstrați că :

a) $(a^{-1}ba)^3 = a^{-1}b^3a$, oricare ar fi $a,b\in G$.

b) Dacă $a,b\in G$ astfel încât $a^{-2}ba^2 = e$ şi $a\,ba^{-2} = b^3$, atunci $a=b=e$.

Soluție:

a) Avem $(a^{-1}ba)^3 = (a^{-1}ba)(a^{-1}ba)(a^{-1}ba) = a^{-1}\cdot b\cdot\left(a\cdot a^{-1}\right)\cdot b\cdot\left(a\cdot a^{-1}\right)\cdot b\cdot a = a^{-1}\cdot b^3\cdot a$
.... 2 puncte

b) Ridicăm prima egalitate la puterea a treia şi raționăm ca la a) şi obținem $a^{-2}b^3a^2 = e$ ...... 2 puncte

Înlocuim b^3 ținând cont de a doua egalitate, avem:

$a^{-2}(aba^{-2})a^2 = e \Leftrightarrow (a^{-2}a)b(a^{-2}a^2) = e \Leftrightarrow a^{-1}be = e.$ Deci $a^{-1}b = e$ rezultă $a=b$ (1) ...... 2 puncte

Finalizare: Înlocuim în prima egalitate, obținem $a^{-2}aa^2 = e$, deci $a=e$ şi din (1) obținem $a=b=e.$
.... 1 punct

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = e^x(\cos^2 x + 2016) + 1.$ Se cere:

a) Arătați că $f(x) - f'(x) = e^x\sin 2x + 1,\quad x\in\mathbb{R}.$

b) Calculați $I = \int \dfrac{\sin 2x + e^{-x}}{e^{-x} + \cos^2 x + 2016}dx.$

Soluție:

a) Calculează $f'(x) = e^x\cos^2 x - e^x\sin 2x + 2016e^x$ .... 1 punct

Finalizare: $f(x) - f'(x) = e^x\sin 2x + 1,\quad x\in\mathbb{R}.$ .... 1 punct

b) Obține $I = \int \dfrac{e^x\sin 2x + 1}{1 + e^x(\cos^2 x + 2016)}dx$ .... 2 puncte

$= \int \dfrac{f(x) - f'(x)}{f(x)}dx = \int dx - \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$ .... 2 puncte

Finalizare: $= x - \ln\left|f(x)\right| + C = x - \ln[e^x(\cos^2 x + 2016) + 1] + C$ .... 1 punct

3. Fie matricele $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ şi

mulțimea $G = \left\{M(r)\,|\,M(r) = I_2 + rX,\, r\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\right\}$

a) Calculați X^2, X^3.

b) Arătați că $M(r)\cdot M(s)\in G$, pentru orice $M(r), M(s)\in G$.

c) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

d) Rezolvați ecuația $(M(r))^3 = I_2 + 13X$, unde $M(r)\in G$.

Soluție:

a) $X^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$; $X^3 = \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 20 & -12 \end{pmatrix}$ .... 1 punct

b) Avem $X^2 = 2X$

$M(r)\cdot M(s) = (I_2 + rX)\cdot(I_2 + sX) = I_2^2 + rXI_2 + sXI_2 + rsX^2 = I_2 + rX + sX + rsX^2 =$

$= I_2 + rX + sX + 2srX = I_2 + (r+s+2rs)X = I_2 + tX,\ \ t = r+s+2rs\in\mathbb{R}$

Deoarece $r \neq -\frac{1}{2},\ s\neq -\frac{1}{2} \Rightarrow (2r+1)\cdot(2s+1)\neq 0$, deci $r+s+2rs\neq -\frac{1}{2}$ .... 2 puncte

c) Asociativitatea, comutativitatea .... 1 punct

$I_2 = M(0)\in G$, element neutru. Inversa matricei $M(r)$ din G este $M(r^*) = M(-\frac{r}{1+2r})\in G$

Deci $(G,\cdot)$ este grup comutativ .... 1 punct

d) ($(M(r))^3 = I_2 + (3r + 6r^2 + 4r^3)X$), $(M(r))^3 = I_2 + 13X$. Deci avem $3r + 6r^2 + 4r^3 = 13$

.... 1 punct

$(r-1)(4r^2 + 10r + 13) = 0 \Rightarrow r = 1\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Am obținut că $M(1) = I_2 + X$ este soluția ecuației date ……………….. 1 punct

4. Se consideră integrala nedefinită $I(x,n) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+n}dx$,

unde $x\in(0,+\infty)$ și $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $I(x,0)$.

b) Calculați $I(x,1)$.

c) Calculați $I(x,n)$, pentru $n\geq 2$.

Soluție:

a) $I(x,0) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}dx$

Obține $\frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)$ .... 2 puncte

Obține $\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}dx = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x+2)}\right) + C$ .... 1 punct

b) $I(x,1) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+1}dx = \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2}dx = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$ .... 2 puncte

c) $I(x,n) = \int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)+n}dx = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot arctg\left(\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{n-1}}\right) + C$ .... 2 puncte